Projektovanje paralelnih algoritama II

- Primeri paralelnih algoritama, I deo
  - Paralelni algoritmi za množenje matrica

Algoritmi za množenje matrica

- Ovde su data tri paralelna algoritma:
- Direktan algoritam sa tri ugnježdene petlje
- Paralelni algoritam po principu podeli-i-zavladaj
- Paralelizovan Strasenov algoritam

Direktan algoritam

- Zasnovan na paralelizaciji petlji u standardnom serijskom algoritmu sa tri ugnježdene **for** petlje
  - Rezultat je procedura P-Square-Matrix-Multipy:

P-Square-Matrix-Multiply(A, B)
1. $n = A$.rows
2. neka je C nova matrica dimenzije n x n
3. **parallel for** i = 1 to n
4.   **parallel for** j = 1 **to** n
5. $c_{ij} = 0$
6.   **for** k = 1 **to** n
7. $c_{ij} = c_{ij} + a_{ik}\, b_{kj}$
8. **return** C

Analiza direktnog algoritma

- Rad:
  - Serijalizacija: kod sa tri ugnježdene **for** petlje sa po n iteracija, pa je $T_1(n) = \Theta(n^3)$.
- Raspon:
  - $T_\infty(n) = \Theta(n)$, jer je raspon za **parallel for** petlje $\Theta(\lg n)$, a za običnu je $\Theta(n)$; dakle, ukupno: $\Theta(n)$
- Paralelizam: $\Theta(n^3)/\Theta(n) = \Theta(n^2)$
- Domaći:
  - Paralelizujte unutrašnji **for** da bi se dobio paralelizam $\Theta(n^3/\lg n)$
    - Prosta zamena sa **parallel for** dovodi do trke do podataka!

Algoritam po principu podeli-i-zavladaj (1/2)

- Polazni problem se podeli na manje probleme
  - Matrice, *A*, *B* i *C*, dimenzije *n* x *n*, se podele na četiri podmatrice, dimenzije *n*/2 x *n*/2 :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\; B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},\; C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

  - Onda se proizvod matrica može napisati kao:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Algoritam po principu podeli-i-zavladaj (2/2)

P-Matrix-Multiply- Recursive(C, A, B)
1. n = A.rows
2. **if** n == 1
3. $c_{11} = a_{11}b_{11}$
4. **else** neka je T nova matrica dimenzije n x n
5. podeli matrice A, B, C i T u podmatrice dimenzije $n/2$ x $n/2$
6. **spawn** P-Matrix-Multiply- Recursive(C_{11}, A_{11}, B_{11})
7. **spawn** P-Matrix-Multiply- Recursive(C_{12}, A_{11}, B_{12})
8. **spawn** P-Matrix-Multiply- Recursive(C_{21}, A_{21}, B_{11})
9. **spawn** P-Matrix-Multiply- Recursive(C_{22}, A_{21}, B_{12})
10. **spawn** P-Matrix-Multiply- Recursive(T_{11}, A_{12}, B_{21})
11. **spawn** P-Matrix-Multiply- Recursive(T_{12}, A_{12}, B_{22})
12. **spawn** P-Matrix-Multiply- Recursive(T_{21}, A_{22}, B_{21})
13. P-Matrix-Multiply- Recursive(T_{22}, A_{22}, B_{22})
14. **sync**
15. **parallel for** i = 1 to n
16. **parallel for** j = 1 **to** n
17. $c_{ij} = c_{ij} + t_{ij}$

- Osnovni slučaj: linija 3
- Rekurzivni slučaj: linije 4-17
- Rekurzivni pozivi u linijama 6-13 obavljaju 8 množenja podmatrica
- Polu proizvodi u matricama C i T se saberu pomoću dve ugnježdene **parallel for** petlje u linijama 15-17

Analiza procedure P-Matrix-Multiply-Recursive (1/2)

- Rad:
  - Podela matrica u $\Theta(1)$ vremenu, osam rekurzivnih množenja podmatrica, i sabiraju se matrice C i T u dve ugnježdene petlje u $\Theta(n^2)$ vremenu:

    $T_1(n) = 8\ T_1(n/2) + \Theta(n^2)$
  - Rešenje: po prvom slučaju master teoreme:

    $T_1(n) = \Theta(n^3)$
  - Rad ovog paralelnog algoritma je asimtotski jednak radu direktnog algoritma

Analiza procedure P-Matrix-Multiply-Recursive (2/2)

- Raspon:
  - Raspon podele matrica je $\Theta(1)$, raspon dve ugnježde-ne **parallel for** petlje u linijama 15-17 je $\Theta(\lg n)$, raspon 8 paralelnih rekurzivnih poziva = max od njih = raspon bilo kog od tih poziva. Ukupno:

    $T_\infty(n) = T_\infty(n/2) + \Theta(\lg n)$
- Rešenje: $T_\infty(n) = \Theta(\lg^2 n)$, metodom zamene
  - Master metoda se ne može primeniti. Zašto?
- Paralelizam: $T_1(n)/ T_\infty(n) = \Theta(n^3 / \lg^2 n)$
  - To je veoma visok paralelizam

Strasenov metod za množenje matrica (1/3)

- Ključ je da se rekurzivno stablo učini manje razgranatim
  - Umesto 8 množenja matrica $n/2$ x $n/2$, on obavlja 7
- Cena za uklanjanje jednog matričnog množenja
  - Nekoliko matričnih sabiranja
  - Ali, konstantan broj matričnih sabiranja

Strasenov metod za množenje matrica (2/3)

- Stasenov metod je zasnovan na sledećim transformacijama:

$$S_1 = B_{12} - B_{22},\ \ S_2 = A_{11} + A_{12},\ \ S_3 = A_{21} + A_{22},\ \ S_4 = B_{21} - B_{11}$$
$$S_5 = A_{11} + A_{22},\ \ S_6 = B_{11} + B_{22},\ \ S_7 = A_{12} - A_{22},\ \ S_8 = B_{21} + B_{22}$$
$$S_9 = A_{11} - A_{21},\ \ S_{10} = B_{11} + B_{12}$$

$$P_1 = A_{11}\, S_1,\ \ P_2 = S_2\, B_{22},\ \ P_3 = S_3\, B_{11},\ P_4 = A_{22}\, S_4$$
$$P_5 = S_5\, S_6,\ \ P_6 = S_7\, S_8,\ P_7 = S_9\, S_{10}$$

$$C_{11} = P_5 + P_4 - P_2 + P_6,\ \ C_{12} = P_1 + P_2$$
$$C_{21} = P_3 + P_4,\ \ C_{22} = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$$

Strasenov metod za množenje matrica (3/3)

- Metod se sastoji od sledeća četiri koraka:
  - Podeliti matrice A, B i C na podmatrice dimenzije $n/2$ x $n/2$. Ovaj korak uzima $\Theta(1)$ vreme.
  - Napraviti 10 matrica $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$. Ovaj korak uzima $\Theta(n^2)$ vremena.
  - Rekurzivno izračunati sedam matričnih proizvoda $P_1, P_2, \ldots, P_7$.
  - Izračunati željenje podmatrice C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22} matrice C. Ovaj korak uzima $\Theta(n^2)$ vremena.

Analiza Strasenovog metoda

- Cilj: odrediti vreme izvršenja $T(n)$
  - Za n=1 svodi se na prosto skalarno množenje: $\Theta(1)$
  - Za $n > 1$, koraci 1, 2 i 4 nose $\Theta(n^2)$ vremena, a korak 3 zahteva sedam množenja matrica dim. $n/2$ x $n/2$
  - Rekurencija za vreme izvršenja $T(n)$:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & n = 1 \\ 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2), & n > 1 \end{cases}$$

  - Primenom master metode dobija se rešenje ove jednačine: $T(n) = \Theta(n^{\lg 7})$
  - Asimptotski brže od direktnog moženja matrica

Paralelizovan Strasenov metod

- Sastoji se od sledeća četiri koraka:
  - Podeliti matrice A, B i C na podmatrice dimenzije $n/2$ x $n/2$. Ovaj korak uzima rad $\Theta(1)$ i isti raspon.
  - Korišćenjem dve ugnježdene **parallel for** petlje napraviti 10 matrica S_1, S_2,..., S_{10}. Rad je $\Theta(n^2)$ i raspon je $\Theta(\lg n)$.
  - Rekurzivno izračunati sedam matričnih proizvoda P_1, P_2,..., P_7.
  - Korišćenjem dve ugnježdene **parallel for** petlje izračunati željenje podmatrice C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}. Rad je $\Theta(n^2)$ i raspon je $\Theta(\lg n)$.

Analiza paralelizovanog Strasenovog metoda

- Rad:
  - Serijalizacija = originalni algoritam $\Rightarrow T_1(n) = \Theta(n^{\lg 7})$
- Raspon:
  - Sedam rekurzivnih poziva izvršava u paraleli
  - Dobija se identična rekurencija kao za P-Matrix-Multipy-Recursive $\Rightarrow T_\infty(n) = \Theta(\lg^2 n)$
- Paralelizam: $T_1(n)/\ T_\infty(n) = \Theta(n^{\lg 7} / \lg^2 n)$
  - Malo niži od paralelizma P-Matrix-Multiply-Recursive